

I. Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble

- Un ensemble Ω est dit fini s'il contient 0 ou n éléments.
- Le nombre d'éléments d'un ensemble Ω est appelé cardinal de Ω et il est noté $\text{Card}\Omega$.

EXEMPLE :

$$E = \{1; 2; 3; 4\}, \text{Card}E = 4$$

$$F = \{a; b; c; d; e; f\}, \text{Card}F = 6$$

2. Propriétés

Soient Ω un ensemble fini et A et B des parties de Ω et $\emptyset$ l'ensemble vide.

- $\text{Card}\emptyset = 0$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$
- si $A \cap B = \emptyset$, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B$
- Si $A \subset B \Rightarrow \text{Card}A \leq \text{Card}B$
- Si $A \subset \Omega \Rightarrow \text{Card}\bar{A} = \text{Card}\Omega - \text{Card}A$

3. Factorielle

Pour un entier n , le nombre $n!$ s'appelle la factorielle de n .

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

$$1! = 1 \quad \text{et} \quad 0! = 1$$

EXEMPLE :

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

4. Combinaison

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments.

Le nombre de p -combinaison d'un ensemble de n

éléments est égal à :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque :

$$C_n^p \text{ est aussi noté } \binom{n}{p}.$$

A retenir

- On applique la combinaison, si l'ordre n'a pas de sens et si la répétition n'est pas possible.
- La combinaison est aussi appliquée s'il s'agit d'un tirage simultané.

EXERCICE D'APPLICATION :

Le foyer du lycée doit élire son bureau composé par 3 membres. Parmi les 20 candidats se trouvent 12 filles dont 5 en terminale et 8 garçons dont 4 en terminale.

- Combien y'a-t-il de bureaux possibles.
- Déterminer le nombre de bureaux possibles si :
A << les personnes choisies sont des élèves de terminale >>
B << les personnes choisies sont de même sexe >>
C << le bureau contient une seule fille >>

Solution :

- Déterminons le nombre de bureaux possibles.

Soit E l'ensemble des bureaux possibles, alors

$$\text{Card}E = C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3! \times 17!} = 1140$$

- Déterminons le nombre de bureaux possibles si :

- A << les personnes choisies sont des élèves de terminale >>

On prend 3 membres parmi les 9 élèves de terminale (C_9^3).

$$\text{Card}A = C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84$$

- B << les personnes choisies sont de même sexe >>

On prend 3 filles parmi les 12 filles (C_{12}^3) <<OU>> 3 garçons parmi les 8 garçons (C_8^3) et on applique l'addition car on a un <<OU>>.

$$\text{Card}B = C_{12}^3 + C_8^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} + \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{12!}{3! \times 9!} + \frac{8!}{3! \times 5!} = 220 + 56 = 276$$

- C << le bureau contient une seule fille >>

On prend 1 fille parmi les 12 filles (C_{12}^1) <<et>> 2 garçons

parmi les 8 garçons (C_8^2) et on applique la multiplication car on a un <<et>>.

$$\text{Card}C = C_{12}^1 \times C_8^2 = \frac{12!}{1!} \times \frac{8!}{2! \times 6!} = 12 \times 28 = 336$$

5. Arrangement

Un arrangement de p éléments d'un ensemble E de n éléments ($p \leq n$) est une liste composée de p éléments distincts 2 à 2 de l'ensemble E .

Le nombre de **p -arrangement** d'un ensemble de n

éléments est égal à : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

A retenir

- On applique l'arrangement si l'ordre a un sens et si la répétition n'est pas possible.
- L'arrangement est aussi appliqué s'il s'agit d'un tirage successif sans remise.

EXERCICE D'APPLICATION :

Le foyer du lycée doit élire son bureau composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Parmi les 20 candidats se trouvent 12 filles dont 5 en terminale et 8 garçons dont 4 en terminale.

- Combien y'a-t-il de bureaux possibles.
- Déterminer le nombre de bureaux possibles si :
A << les personnes choisies sont des élèves de terminale >>
B << les personnes choisies sont de même sexe >>
C << le bureau contient une seule fille >>

SOLUTION :

- Déterminons le nombre de bureaux possibles.
Soit Ω l'ensemble des bureaux possibles, alors
 $Card\Omega = A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 6840$
- Déterminons le nombre de bureaux possibles si :
➤ A << les personnes choisies sont des élèves de terminale >>
On prend 3 membres parmi les 9 élèves de terminale (A_9^3).
 $CardA = A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 504$
➤ B << les personnes choisies sont de même sexe >>
On prend 3 filles parmi les 12 filles (A_{12}^3) <<OU>> 3 garçons parmi les 8 garçons (A_8^3) et on applique l'addition car on a un <<OU>>.
 $CardB = A_{12}^3 + A_8^3 = \frac{12!}{(12-3)!} + \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{12!}{9!} + \frac{8!}{5!} = 1320 + 336 = 1656$
➤ C << le bureau contient une seule fille >>
On prend 1 fille parmi les 12 filles (A_{12}^1) <<et>> 2 garçons parmi les 8 garçons (A_8^2) et on applique la multiplication car on a un <<et>> et on multiplie par 3 car on a trois choix.
 $CardC = A_{12}^1 \times A_8^2 \times 3 = \frac{12!}{(12-1)!} \times \frac{8!}{(8-2)!} \times 3 = \frac{12!}{11!} \times \frac{8!}{6!} \times 3 = 12 \times 8 \times 7 \times 3 = 2016$

6. Permutation

On appelle **permutation** des n éléments d'un ensemble toute disposition ordonnée de ces n éléments.

Le nombre de permutations à n éléments est égal à $n!$.

Exemple :

- Le nombre de permutations des lettres de l'ensemble $\{a, b, c\}$ est $3! = 6$
- les permutations des lettres de l'ensemble $\{a, b, c\}$ sont :

$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$.

Remarque : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par $3!$ car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme).

EXEMPLE :

- Déterminer le nombre d'anagrammes du mot **Afrique**.
Le nombre d'anagrammes du mot **Afrique** est $7! = 5040$
<<Le nombre d'anagrammes du mot Afrique est égal au nombre de permutations des lettres qui forment ce mot car aucune de ces lettres ne se répète>>.
- Déterminer le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec les lettres qui forment le mot **exemple**.
Le nombre d'anagrammes du mot **exemple** est $\frac{7!}{3!} = 840$
<< On divise par $3!$ car on a 3e >>
➤ Déterminer le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec les lettres qui forment le mot **statistiques**.

Le nombre d'anagrammes du mot **statistiques** est

$$\frac{12!}{3! \times 3! \times 2!} = 6652800$$

<< On divise par $3! \times 3! \times 2!$ car on a 3s, 3t et 2i >>

Remarque :

Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé permutation, $A_n^n = n!$.

7. P-Listes

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Une **p-liste** est une liste de p éléments distincts ou non d'un ensemble E de n éléments.

Le nombre de **p-listes** de **n** éléments est égal à : n^p

A retenir

- On applique la **p-listes** si l'ordre a un sens et si la répétition est possible.
- La **p-listes** est aussi appliqué s'il s'agit d'un tirage successif avec remise.

EXEMPLE 1 :

Déterminer le nombre de codes de 4 chiffres possibles.

SOLUTION :

Soit **E** l'ensemble des chiffres.

$$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Soit l'événement A « Code de 4 chiffres ».

$$\text{CardA} = 10^4 = 1000$$

EXEMPLE 2 :

Déterminer le nombre de codes de 4 lettres possibles.

SOLUTION :

Soit **E** l'ensemble des lettres.

$$E = \{a; b; c; d; \dots \dots \dots; x; y; z\}$$

Soit l'événement B « Code de 4 lettres ».

$$\text{CardB} = 26^4 = 456976$$

II. Probabilité

1. Vocabulaire

- Une expérience est **aléatoire** lorsqu'on n'est incapable de prédire son résultat bien qu'on puisse quand même envisager des résultats possibles. Le lancer d'un dé constitue une expérience aléatoire dans la mesure où le dé est bien équilibré.
- Le résultat d'une expérience est appelée **issue**. L'ensemble Ω des issues d'une expérience est appelé **univers**. Dans le cas d'un lancer de dé à 6 faces : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Un **événement** correspond à une partie de l'univers. **A** = $\{2; 4; 6\}$ est l'évènement « obtenir un nombre pair ». Pour que l'évènement soit réalisé, il faut que l'issue de l'expérience soit un élément de l'évènement. **A** est réalisé si l'issue de l'expérience est **2, 4 ou 6**.
- Un **événement élémentaire** est un événement ne contenant qu'un seul élément.

E = $\{6\}$ est l'évènement élémentaire « obtenir 6 ».

2. Réunion, intersection, événements incompatibles,

événements contraires

- La **réunion** de deux événements **A** et **B** est l'évènement constitué des issues qui réalisent l'évènement **A** «ou» l'évènement **B**.

On note $A \cup B$ et on lit **A union B**.

- L'**intersection** de deux événements **A** et **B** est l'évènement constitué des issues qui réalisent l'évènement **A** «et» l'évènement **B**.

On note $A \cap B$ et on lit **A inter B**.

- Deux événements **A** et **B** sont **incompatibles** lorsqu'ils n'ont **aucune issue en commun**.

$$A \cap B = \emptyset \text{ (}\emptyset \text{ se lit ensemble vide).}$$

- Deux événements sont **contraires**
 - s'ils n'ont **aucune issue en commun**
 - si la **réunion de leurs issues constitue l'univers Ω** .

On note $\bar{A}$ l'évènement contraire de **A**. ($\bar{A}$ se lit « A barre »)

EXEMPLE :

- On considère l'évènement **A** « obtenir un **nombre pair** avec un dé à 6 faces », **A** = $\{2; 4; 6\}$ et l'évènement **B** « obtenir un **nombre multiple de 3** avec un dé à 6 faces », **B** = $\{3; 6\}$

$$A \cup B = \{2; 3; 4; 6\} \text{ et } A \cap B = \{6\}.$$

- L'évènement $\bar{A}$ « obtenir un nombre impair avec un dé à 6 faces », $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ est contraire à l'évènement **A**. $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

3. Probabilité d'un événement, équiprobabilité

(On parle d'équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.)

La probabilité d'un événement **A** est notée $P(A)$, est un nombre dans l'intervalle $[0; 1]$ et est égale à la **somme des probabilités des événements élémentaires** qui le constituent.

$$P(A) = \frac{\text{CardA}}{\text{Card}\Omega}$$

La **somme des probabilités** de tous les événements élémentaires de l'univers Ω est **égale à 1**.

Remarque :

Ω est un événement certain et $\emptyset$ est un événement impossible.

Il en résulte que la probabilité d'un événement impossible est $0 : P(\emptyset) = 0$.

La probabilité d'un événement certain est $1 : P(\Omega) = 1$

4. Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements et $\bar{A}$ l'événement contraire de A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$ d'où

$$P(A \cap B) = 0.$$

Dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Remarque :

Si A est un événement alors $0 \leq P(A) \leq 1$.

EXEMPLE :

Pour le lancer d'un dé non truqué, toutes les faces ont la même probabilité de sortir :

Événement	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

Soit l'événement A « obtenir un nombre pair », alors $A = \{2 ; 4 ; 6\}$

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE D'APPLICATION :

Une urne contient 12 boules dont 7 sont rouges et 5 sont bleues. On tire simultanément trois boules dans l'urne. Les boules ont la même probabilité d'être tirées.

- Déterminer le nombre de tirages possibles.
- Calculer les cardinaux des ensembles suivants :
A «trois boules rouges»
B «Boules de même couleur»
C «une boule de couleur rouge parmi les trois boules tirées»
- En déduire la probabilité des événements A,B et C.

SOLUTION :

- Déterminons le nombre de tirages possibles.

Soit Ω l'univers, l'ensemble des tirages possibles.

"On applique la combinaison car on a un tirage simultané"

$$\text{Card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3! \times 9!} = 220$$

- Calculons les cardinaux des ensembles suivants :

A «trois boules rouges»

Pour chaque tirage on aura 3 boules rouges parmi les 7, (C_7^3).

$$\text{Card}A = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

B «Boules de même couleur»

Pour chaque tirage on aura 3 boules rouges parmi les 7, (C_7^3) «OU» 3 boules bleues parmi les 5, (C_5^3) et on applique l'addition car on a un «OU».

$$\text{Card}B = C_7^3 + C_5^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} = 35 + 10 = 45$$

C «une boule de couleur rouge parmi les trois boules tirées»

Pour chaque tirage on aura 1 boule rouge parmi les 7, (C_7^1) «et» 2 boules bleues parmi les 5, (C_5^2) et on applique la multiplication car on a un «et».

$$\text{Card}C = C_7^1 \times C_5^2 = \frac{7!}{1!(7-1)!} \times \frac{5!}{2!(5-2)!} = 7 \times 10 = 70$$

- Déduisons la probabilité des événements A,B et C.

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{35}{220} = 0,15$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{45}{220} = 0,2$$

$$P(C) = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega} = \frac{70}{220} = 0,31$$

Exercice 1 Bac 2018

Un porte-monnaie contient trois pièces de 100f CFA, deux pièces de 50f CFA et une pièce de 25f CFA.

On tire simultanément deux pièces du porte-monnaie et on considère le gain obtenu.

- Recopier et compléter le tableau des gains ci-dessous :

Pièces tirées		100F CFA et 50F CFA			
Gain obtenu en F CFA	200	150			

- Calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous :

A « Avoir un gain de 200f CFA ».

B « Avoir deux pièces de même valeur ».

C « Avoir un gain égal au moins à 150f CFA ».

D « Avoir un gain égal au plus à 150f CFA ».